Sub

Física - 4

Escola Politécnica - 2001

FAP2296 - PROVA SUBSTITUTIVA

04/12/2001

♢ Esta prova tem 100 minutos de duração.
♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.
♢ É proibido o uso de calculadoras.
♢ Resolva cada questão na folha apropriada.
♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Uma onda eletromagnética, de comprimento de onda $\lambda = 3,0$ m, está se propagando no vácuo, na direção $+x$. A amplitude do campo elétrico $\vec{E}$ é 300 V/m, direcionado ao longo do eixo y.

a. (0,5) Se $E = E_m \operatorname{sen}(k\,x - \omega\,t)$, quais são os valores de k e ω?

b. (0,5) Calcule a intensidade desta onda.

c. (0,5) Se a onda incidir sobre uma superfície *totalmente absorvente*, possuindo área de 2 m^2 e situada no plano yz, qual será a taxa de momento linear transferido para a superfície e qual a pressão de radiação exercida sobre a superfície?

d. (1,0) Determine o número de *fótons* que serão absorvidos pela superfície do ítem anterior durante um tempo igual ao período da onda.

Questão 1

a.

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{3} = 2,1 \text{rad/m}; \qquad \omega = 2\pi\, f = 2\pi\, \frac{c}{\lambda} = 6,3 \times 10^8\, \text{rad/s}$$

b.

$$I = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c} = \frac{300^2}{2(4\pi \times 10^{-7})(3 \times 10^8)} = 119\, \text{W/m}^2$$

c. Taxa de momento transferido para uma superfície totalmente absorvente:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{I\,A}{c} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c^2} A = \frac{300^2}{2(4\pi \times 10^{-7})(3 \times 10^8)^2} 2 = 8,0 \times 10^{-7} \text{N}$$

d.

Energia do fóton: $E = h\,f = h\dfrac{c}{\lambda}$

Enegia total absorvida: $U = I\,A\,T = I\,A\dfrac{\lambda}{c}$

Número de fótons: $N = \dfrac{U}{E} = \dfrac{I\,A}{h}\left(\dfrac{\lambda}{c}\right)^2 = 3,6 \times 10^{19}$

Questão 2

Uma partícula tem função de onda

$$\Psi(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{5L}} \text{sen}(4\pi\, x/L) & \text{se } \; -L \le x \le 0 \\ 2\sqrt{\frac{2}{5L}} \text{sen}(2\pi\, x/L) & \text{se } \; 0 \le x \le L \\ 0 & \text{se } \; |x| \ge L \end{cases}$$

a. (0,5) Qual é a probabilidade de a partícula ser encontrada em $x > 0$?

b. (0,5) Determine os comprimentos de onda de De Broglie para $x > 0$ e $x < 0$.

c. (0,5) Calcule o *momento linear* e a *energia cinética* nas duas regiões ($x > 0$ e $x < 0$) e determine *razão* entre os valores das energias cinéticas à esquerda e à direita de $x = 0$.

d. (1,0) Considere agora que $\Psi(x)$ representa um *estado estacionário* de uma partícula de massa m, confinada a um poço de potencial infinito, possuindo um *degrau* de altura U_0, como esboçado na figura 1. Determine U_0 em termos de L e da massa m da partícula.

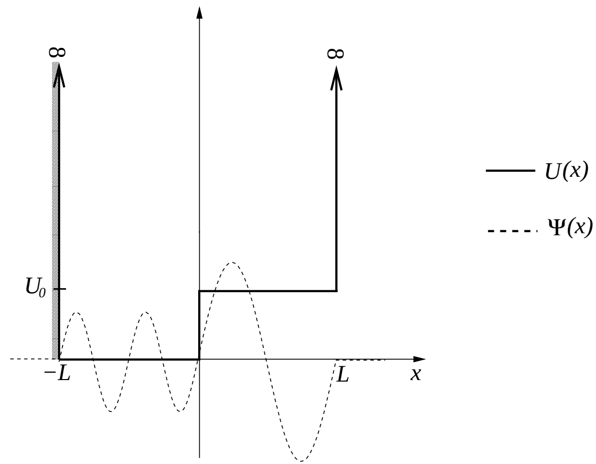

Figura 1: Questão 2

Questão 2

a. Verificando a normalização:

$$\int_{-L}^{L} |\psi(x)|^2\, dx = \int_{L}^{0} |\psi(x)|^2\, dx + \int_{0}^{L} |\psi(x)|^2\, dx$$

$$= \frac{2}{5L}\int_{-L}^{0} [\text{sen}(4\pi\, x/L)]^2\, dx + \frac{8}{5L}\int_{0}^{L} [\text{sen}(2\pi\, x/L)]^2\, dx = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

Portanto, a probabilidade de encontrar a partícula à direita é

$$\frac{8}{5L}\int_{0}^{L} [\text{sen}(2\pi\, x/L)]^2\, dx = \frac{4}{5}$$

b.

$$\lambda_{x<0} = \frac{2\pi}{k_{x<0}} = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{L}} = \frac{L}{2}, \quad \lambda_{x>0} = \frac{2\pi}{k_{x>0}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{L}} = L$$

c.

$$p_{x<0} = \frac{h}{\lambda_{x<0}} = \frac{2h}{L}, \;\; p_{x>0} = \frac{h}{\lambda_{x>0}} = \frac{h}{L}, \;\; \Longrightarrow \frac{p_{x>0}^2/2m}{p_{x>0}^2/2m} = \frac{1}{4}$$

d. Como ψ é um *estado estacionário*,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi + U\psi = E\,\psi,$$

onde E é a energia do estado estacionário. Portanto,

$$E = \frac{h^2}{2\,mL^2} + U_0 = \frac{4\,h^2}{2\,mL^2} \Longrightarrow U_0 = \frac{3\,h^2}{2\,m\,L^2}$$

Questão 3

Parte I

Em um metal, a energia máxima dos foto-elétrons produzidos por luz de comprimento de onda $\lambda_1 = 300$ nm é $E_1 = 2,14$ eV.

a. (0,5) Qual é a função trabalho do metal?

b. (0,5) Qual é a energia cinética máxima para $\lambda_2 = 400$ nm?

c. (0,5) Qual é o máximo comprimento de onda que produzirá efeito foto-elétrico no metal?

Parte II

A função de onda do elétron no estado fundamental, 1s, do átomo de hidrogênio é

$$\Psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \mathrm{e}^{-r/a_0}$$

a. (0,5) Verifique que esta função está normalizada.

b. (1,0) Calcule o valor médio de r.

Questão 3

Parte I

a.

$$K_{\max} = h\,f - \phi \Longrightarrow \phi = \frac{h\,c}{\lambda_1} - E_1 = 4,14 - 2,14 = 2,0\,\mathrm{eV}$$

b.

$$K_{\max} = \frac{h\,c}{\lambda_2} - \phi = 3,1 - 2,0 = 1,1\mathrm{eV}$$

c.

$$\frac{h\,c}{\lambda_2} - \phi \geq 0 \Longrightarrow \lambda \leq \frac{h\,c}{\phi} = 621 \text{ nm}$$

Parte II

a.

$$4\pi \int_0^\infty r^2|\psi|^2 dr = \frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^\infty r^2 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{4}{a_0^3} 2\left(\frac{a_0}{2}\right)^3 = 1$$

b.

$$\langle r\rangle = 4\pi \int_0^\infty r^3|\psi|^2 dr = \frac{4\pi}{\pi a_0^3}\int_0^\infty r^3 \mathrm{e}^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{4}{a_0^3} 6\left(\frac{a_0}{2}\right)^4 = \frac{3}{2}a_0$$

Questão 4

Em $t = 0$, uma amostra radioativa contém $18,3\,\mu g$ de ${}^{11}_{6}\mathrm{C}$ puro, que tem meia vida de $20,4$ min.

a. (1,0) Determinar o número de núcleos em $t = 0$.

b. (0,5) Calcule a constante de desintegração e atividade inicial da amostra.

c. (0,5) Quanto tempo levará para que a amostra atinja uma atividade de apenas $1/4$ da atividade inicial?

Questão 4

a.

$$N_0 = \frac{18,3 \times 10^{-9}\,\mathrm{kg}}{11u} = \frac{18,3}{11 \times 1,66} \times 10^{18} \approx 10^{18}$$

b. Quando $N = N_0/2$, $t = \tau$ (meia vida). Substituindo estes valores em $N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$,

$$\frac{1}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda\tau} \Longrightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{\tau} = \frac{\ln 2}{20,4 \times 60} \approx 6 \times 10^{-4}$$

Utilizando a definição de atividade,

$$\left|\frac{dN}{dt}\right| = \lambda N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t} = R_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}; \;\; R_0 = \lambda\, N_0 \approx 6 \times 10^{-4} \times 10^{18} \approx 6 \times 10^{14}\ \mathrm{s}^{-1}$$

c. De acordo com a definição de meia vida, $t_{1/4} = 2\tau = 40,8\,\mathrm{min}$

Formulário

Potencial Coulombiano: $U = \kappa \dfrac{e^2}{r}; \quad \kappa = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

$$I(T,\lambda) \;=\; \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5(\mathrm{e}^{\frac{hc}{\lambda k_B T}}-1)}; \quad \lambda \cdot T \;=\; 0,29 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}$$

$$L = nh/2\pi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

$$\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = \frac{L}{2}; \;\; m = 1,2,\cdots; \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\alpha r} r^n dr = \frac{n!}{\alpha^{n+1}};$$

$$n! \equiv n\;(n-1)\;(n-2)\;\cdots\;1$$

$$P(r)dr = 4\pi r^2|\Psi(r)|^2 dr$$

$$K_{max} = hf - \Phi$$

$$I_{onda} = \frac{E_m^2}{2\mu_0 c}$$

$$E_f \;=\; hf \;=\; hc/\lambda$$

$h \;=\; 6,63\cdot10^{-34}\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} = 4,14\cdot10^{-15}\mathrm{eV}\cdot\mathrm{s}; \;\; c \;=\; 3\cdot10^8\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}; \;\; \mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\dfrac{\mathrm{H}}{\mathrm{m}}$

$1\mathrm{eV} \;=\; 1,6{\cdot}10^{-19}\,\mathrm{J}; \;\; 1\,u = 1,66{\times}10^{-27}\,\mathrm{kg}; \;\; N_A = 6,02{\times}10^{23}; \;\; \ln(2) = 0,693$

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N; \quad R \equiv \left|\frac{dN}{dt}\right|$$