$\boxed{\textbf{A3}}$

Física IV

Escola Politécnica - 2002

FAP2296 - 3^a AVALIAÇÃO

26 de novembro de 2002

◊ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

◊ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

◊ Escreva de forma legível.

◊ É proibido o uso de calculadoras.

◊ Resolva cada questão na folha apropriada.

◊ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Um elétron com energia cinética $E_{\text{cin}} = 22\,eV$ colide com um átomo de hidrogênio que se encontra no estado fundamental de energia. Apenas uma parte da energia do elétron incidente é transferida para o átomo que passa para um estado excitado com número quântico n. Decorrido um intervalo de tempo Δt, após a colisão, o átomo emite um fóton com energia igual a $10,2\,eV$.

(1,0 ponto) (a) Qual é o comprimento de onda λ de de Broglie de elétron incidente?

(1,0 ponto) (b) Determine o nível n do estado excitado do hidrogênio.

(0,5 ponto) (c) Calcule a incerteza na energia do fóton emitido sabendo que $\Delta t = 10^{-8}\,s$.

<u>Dado</u>: $E_n = -\dfrac{13,6}{n^2}\,eV$

Solução da Questão 1

(a)

$$\frac{p^2}{2m} = E_{\rm cin} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m\,E_{\rm cin}}} = \frac{6,63 \times 10^{-34}}{\sqrt{2 \times (9,11 \times 10^{-31}) \times (22) \times (1,6 \times 10^{-19})}}$$

$$\lambda = \mathbf{0,26\ nm}$$

(b) Numa transição para o estado fundamental, teremos

$$h\,f = 10,2\,eV = 13,6\,eV\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Podemos verificar que esta relação é satisfeita para $n = 2$, uma vez que

$$13,6 \times \frac{3}{4} = \frac{136}{4}\frac{3}{10} = 34 \times 3/10 = 10,2$$

(c)

$$\Delta E\,\Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta E \geq \frac{\hbar}{2\Delta t} \approx \frac{10^{-34}}{10^{-8}}\,J = 10^{-7}\,eV$$

Questão 2

A função de onda $\psi(x)$ de uma partícula de massa m, confinada no espaço unidimensional $0 \leq x \leq L$ é dada por $\psi(x) = A\text{sen}(n\,\pi\,x/L)$, onde A é uma constante de normalização e $n = 1, 2, 3, \cdots$.

(1,0 ponto) (a) Sabendo que $\psi(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger, obtenha os níveis de energia E_n dessa partícula nessa caixa.

(0,5 ponto) (b) Calcule o valor da constante de normalização A em função de L.

(1,0 ponto) (c) No estado fundamental, qual é a posição mais provável da partícula nessa caixa. Justifique.

(0,5 ponto) (d) Usando o "princípio de incerteza", estime a incerteza no momento da partícula quando esta se encontra em um estado qualquer no intervalo $0 \leq x \leq L$.

Dados: $\dfrac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\left(\dfrac{2m}{\hbar^2}\right)[E - U(x)]\psi(x)$, $\displaystyle\int \mathrm{sen}^2(x)\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\mathrm{sen}(2\,\mathrm{x})}{4}$

Solução da Questão 2

(a) Calculando as derivadas

$$\frac{d}{dx}\mathrm{sen}\,(n\,\pi\,x/L) = \frac{n\,\pi}{L}\cos\,(n\,\pi\,x/L)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathrm{sen}\,(n\,\pi\,x/L) = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\mathrm{sen}\,(n\,\pi\,x/L) = \frac{n\,\pi}{L}\frac{d}{dx}\cos\,(n\,\pi\,x/L) = -\left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 \mathrm{sen}\,(n\,\pi\,x/L)$$

Substituindo na equação de Schrödinger e levando em conta que $U(x) = 0$ no intervalo $0 \leq x \leq L$, teremos

$$-\left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 = -\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)E.$$

Logo,

$$E = \left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2\left(\frac{\hbar^2}{2m}\right) = \frac{h^2}{8\,m\,L^2}\,n^2$$

(b) Integrando o módulo quadrado da função dada no intervalo $0 \leq x \leq L$, e impondo que o resultado seja igual a 1 (normalização da densidade de probabilidade), teremos

$$|A|^2\int_0^L \mathrm{sen}^2\left(\frac{n\,\pi}{L}\,x\right)\mathrm{d}x = 1.$$

Mudando a variável de integração para $u \equiv \frac{n\,\pi}{L}\,x$, teremos

$$|A|^2\,\frac{L}{n\,\pi}\int_0^{n\,\pi} \mathrm{sen}^2(u)\mathrm{d}u = 1.$$

Usando a fórmula dada

$$|A|^2\,\frac{L}{n\,\pi}\,\frac{n\,\pi}{2} = 1 \Rightarrow A = \mathrm{e}^{i\delta}\sqrt{\frac{2}{L}}$$

(c) A posição mais provável é $x = 1/2$, tendo em vista que a função de onda que descreve o estado fundamental $\text{sen}(\pi\, x/L)$ atinge seu valor máximo para $x = 1/2$. Portanto, a densidade de probabilidade $\text{sen}^2(\pi\, x/L)$ também tem um máximo para $x = 1/2$.

(d) Considerando que a incerteza na posição é da ordem da largura L, teremos

$$\Delta x\, \Delta p = \hbar/2 \Rightarrow \Delta p \geq \hbar/(2L).$$

Questão 3

(1,5 ponto) (a) Escreva a configuração eletrônica do oxigênio ($Z = 8$) e os números quânticos n, l, m_l e m_s de cada elétron.

(1,0 ponto) (b) Calcule o módulo do momento angular orbital ($|\vec{L}|$) e sua projeção z (L_z) de todos os elétrons do átomo de oxigênio.

Solução da Questão 3

(a)

$$1s^2 \;\; 2s^2 \;\; 2p^4$$

$$1s^2 \;:\; n = 1,\; l = 0,\; m_l = 0 \text{ e } m_s = \pm 1/2$$

$$2s^2 \;:\; n = 2,\; l = 0,\; m_l = 0 \text{ e } m_s = \pm 1/2$$

$$2p^2 \;:\; n = 2,\; l = 1,\; m_l = -1 \text{ e } m_s = \pm 1/2$$

$$2p^1 \;:\; n=2,\; l=1,\; m_l=0 \text{ e } m_s=+1/2$$

$$2p^1 \;:\; n=2,\; l=1,\; m_l=+1 \text{ e } m_s=+1/2$$

(b)

$$1s^2 \;:\; l=0 \Rightarrow L=0 \text{ e } m_l=0 \Rightarrow L_z=0$$

$$2s^2 \;:\; l=0 \Rightarrow L=0 \text{ e } m_l=0 \Rightarrow L_z=0$$

$$2p^4 \;:\; l=1 \Rightarrow L=\hbar\sqrt{1(1+1)}=\hbar\sqrt{2} \text{ e } m_l=-1,0,1 \Rightarrow L_z=-\hbar,0,\hbar$$

Questão 4

O núcleo ^{226}Ra sofre um decaimento alfa, conforme a equação $^{226}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}\text{Rn} + \alpha$.

(1,0 ponto) (a) Calcule a energia liberada no decaimento sabendo que as massas dos núcleos, medidas em unidades de massa atômica u, são dadas, respectivamente por $226,025\,u$ e $222,017\,u$ e $4,003\,u$

(1,0 ponto) (b) Seja λ a constante de desintegração por decaimento alfa, $N(t)$ o número de núcleos de ^{226}Ra num instante t e $N_0 = N(t=0)$ o número de átomos no instante inicial $t=0$. Escreva a equação que relaciona $d\,N(t)/dt$ com λ e $N(t)$. A partir dessa equação calcule $N(t)$ em função de N_0, λ e t.

Dados: $m_{\text{el.}} = 9,11 \times 10^{-31}\,kg$, $h = 6,63 \times 10^{-34}\,J \cdot s$, $1\,eV = 1,6 \times 10^{-19}\,J$, $u = 931,5 MeV/c^2$.

Solução da Questão 4

(a)

$$Q = (m_{Ra} - m_{Rn} - m_\alpha)c^2 = 931,5\,(226,025 - 222,017 - 4,003)\,MeV = 4,7\,MeV$$

(b)

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda\,N(t).$$

Integrando esta equação

$$\frac{dN}{N} = -\lambda\,dt \Rightarrow \log\left(\frac{N(t)}{N_0}\right) = -\lambda t \Rightarrow N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda\,t}$$