P2

Física IV

Escola Politécnica - 2003

FAP2296 - GABARITO DA P2

21 de outubro de 2003

◊ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

◊ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

◊ Escreva de forma legível.

◊ É proibido o uso de calculadoras.

◊ Resolva cada questão na folha apropriada.

◊ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Uma rede de difração que tem N fendas por centímetro, uniformemente separadas por uma distância d, dispersa a luz branca de modo que o comprimento de onda $\lambda = 500nm$, do verde, aparece no espectro de quarta ordem sob o ângulo $\theta = 30°$.

(0,5 ponto) (a) Qual a condição para os máximos da rede de difração? Expresse sua resposta em termos de d, λ, θ, e m (ordem do espectro).

(1,0 ponto) (b) Qual é o número de linhas por centímetro (N) da rede de difração?

(1,0 ponto) (c) Admitindo-se que o espectro do visível se estenda de 400nm até 700nm, determinese alguma radiação visível do espectro de quinta ordem aparece ou não no ângulo $\theta = 30°$.

Solução da Questão 1

(a) $d\ sen\ \theta = m\lambda$

(b) A distância d entre as fendas é dada por

$$d = \frac{m\lambda}{sen\ \theta} = \frac{4 \times 5 \times 10^{-7}}{0,5} = 4 \times 10^{-6} m$$

O número de fendas em $1cm = 0,01m$ é igual a

$$\frac{0,01}{4 \times 10^{-6}} = 2.500 \Longrightarrow N = 2.500 \ \text{ fendas}/cm$$

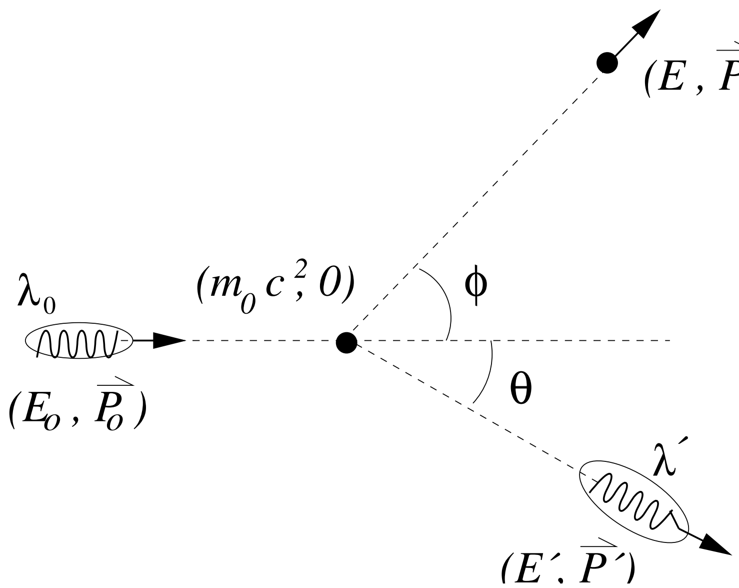
(c) Usando a expressão do item (a) podemos escrever

$$\lambda = \frac{d\ sen\ \theta}{m} = \frac{4 \times 10^{-6} \times 0,5}{5} = 4 \times 10^{-7}\ m = 400\ nm$$

Assim, a luz violeta do espectro de quinta ordem aparece em $\theta = 30^o$.

Questão 2

Um fóton de comprimento de onda λ_0 colide com um elétron em repouso. Após a colisão, é detectado um fóton possuindo comprimento de onda $\lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda$, em uma direção formando um ângulo θ com a direção do fóton incidente (veja figura abaixo).



(1,0 ponto) (a) Escreva as equações de conservação de energia e de momento linear que permitem deduzir a relação

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)$$

para a variação do comprimento de onda do fóton devido ao espalhamento (não é necessário deduzir a relação para $\Delta\lambda$)

(0,5 ponto) (b) Um feixe de raios X de comprimento de onda $\lambda_0 = 0,20\,nm$ e é espalhado pelo alvo sob um ângulo de $\theta = 45^o$ em relação ao feixe incidente. Calcule o comprimento de onda dos raios espalhados. (<u>Dados</u>: $h = 6,6 \times 10^{-34} J \cdot s$, a massa do elétron $m_0 = 9,1 \times 10^{-31}\ kg$ e $c = 3,0 \times 10^8\ m/s$.)

(1,0 ponto) (c) Calcule a fração de energia perdida pelo fóton.

Solução da Questão 2

(a) <u>Conservação de energia</u>

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0 c^2 = \frac{hc}{\lambda'} + m_0 \gamma c^2$$

<u>Conservação de momento</u>

$$\frac{h}{\lambda_0} = \frac{h}{\lambda'}\, cos\ \theta + m_0 \gamma\, v\, cos\ \phi$$

$$0 = \frac{h}{\lambda'}\, sen\ \theta - m_0 \gamma\, v\, sen\ \phi$$

(b) Usando a expressão para $\Delta\lambda$ obtemos

$$\Delta\lambda = \frac{6,6 \times 10^{-34}}{(9,1 \times 10^{-31})(3,0 \times 10^8)}(1 - 0,71) \approx 7 \times 10^{-13}\ m = 0,0007\ nm$$

$$\Longrightarrow \lambda' = \lambda_0 + \Delta\lambda = 0,2007\ nm$$

(c) Fração de energia perdida $= \frac{hc/\lambda_0 - hc/\lambda'}{hc/\lambda_0} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda'} \approx 0,003$

Questão 3

A figura 1A abaixo mostra uma lente de raio de curvatura R, apoiada sobre uma placa de vidro e iluminada por luz que se propaga no ar com comprimento de onda λ. O aparato encontra-se imerso no ar. Ao lado é mostrada a figura de interferência 1B em forma de anéis concêntricos (anéis de Newton). Tais anéis ocorrem para diferentes valores de r e se devem à espessura variável, d, da camada de ar entre a placa de vidro e a lente. Os raios relevantes para a formação da figura de interferência estão representados na figura 1C.

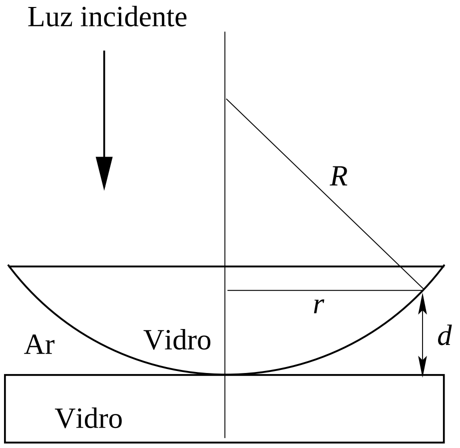


FIG. 1A

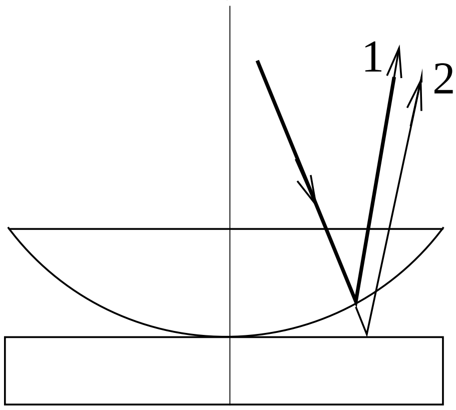


FIG. 1C

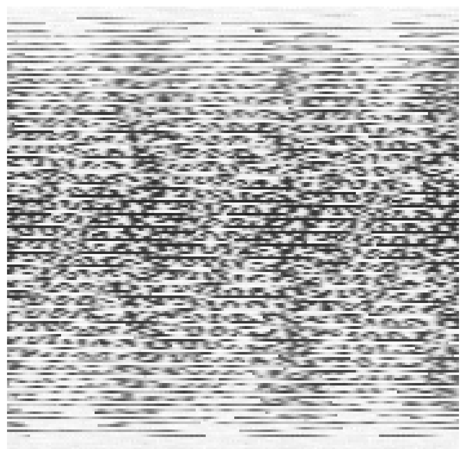


FIG. 1B

(1,0 ponto) (a) Determine a condição de máximo de interferência entre os raios 1 e 2 em função de d, λ e m. Explique claramente como você concluiu por esta condição.

(1,0 ponto) (b) A partir da geometria do aparato, representada na Fig. 1A, vê-se que $R^2 = r^2 + (R-d)^2$. A partir dessa expressão e do resultado do item (a) mostre que a posição r dos máximos de interferência em função de m, R e λ para $\lambda/R << 1$ (isto é, despreze termos que dependam de λ/R) é

$$r = \sqrt{\frac{(2m+1)R\lambda}{2}}\,.$$

(1,0 ponto) (c) Na figura 1B para os anéis de Newton podem ser vistas 11 franjas brilhantes. Determine o raio de curvatura R da lente supondo que a luz incidente possui comprimento de onda de $500\,nm$ e que a lente tem $1\,cm$ de diâmetro.

Solução da Questão 3

(a) Levando em conta a mudança de fase de π na reflexão do raio 1, a interferência vai ser construtiva quando a diferença de percursos ópticos, em unidades de comprimento de onda, satisfizer

$$\frac{2d}{\lambda} - \frac{1}{2} = m \qquad \text{onde} \qquad m = 0, 1, 2, ...$$

(b) A equação do item (a) pode ser reescrita como

$$2d = (m + \frac{1}{2})\lambda.$$

A geometria do aparato é tal que $R^2 = r^2 + (R-d)^2$. Resolvendo para r^2 e substituindo a condição de máximos, obtemos

$$r^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) R\lambda - \frac{1}{4}\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \lambda^2 = \left(m + \frac{1}{2}\right) R\lambda \left[1 - \frac{1}{4}\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{R}\right]$$

Como $\lambda/R \ll 1$, podemos desprezar o segundo termo. Logo

$$r = \sqrt{\frac{(2m+1)\,R\lambda}{2}}$$

(c) A figura mostra 11 franjas brilhantes $\Longrightarrow m = 10$. Usando o resultado do ítem (b),

$$R = \frac{2r^2}{(2m+1)\lambda} = \frac{2 \times (5 \times 10^{-3})^2}{21 \times 500 \times 10^{-9}} \approx 5\,m\,.$$

Questão 4

A potência por unidade de área irradiada por um corpo negro, no intervalo de freqüência $[\nu, \nu + d\nu]$ é dada pela fórmula de Planck,

$$I(\nu, T)\, d\nu = \frac{2\pi h\, \nu^3}{c^2} \frac{1}{\mathrm{e}^{(h\nu/k_B T)} - 1}\, d\nu.$$

(0,5 ponto) (a) Mostre que no limite de altas freqüências ($h\nu \gg k_B T$) $I(\nu, T)$ se reduz à fórmula de Wien, dada por

$$I(\nu, T) \approx \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \mathrm{e}^{-h\nu/k_B T}$$

(1,5 ponto) (b) Use o resultado do ítem anterior para mostrar que o máximo de intensidade ocorre para uma freqüência ν_{max} tal que $\nu_{max}\ /\ T =$ constante, e determine o valor desta constante.

Solução da Questão 4

(a) Quando $h\nu \gg k_B T$, $\exp(h\nu/k_B T) \gg 1$ e a fórmula de Planck pode ser aproximada por

$$I(\nu, T) \approx \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \exp(-h\nu/k_B T)$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial \nu} &= \frac{2\pi h}{c^2} \left[3\nu^2 \exp(-h\nu/k_B T) - \nu^3 \frac{h}{k_B T} \exp(-h\nu/k_B T) \right] \\ &= \frac{2\pi h \nu^2}{c^2} \exp(-h\nu/k_B T) \left[3 - \frac{h\nu}{k_B T} \right] = 0. \end{aligned} \qquad (1)$$

Como $I(\nu, T) \geq 0$, $I(0, T) = 0$ e $I(\nu \to \infty, T) = 0$, o valor de ν que satisfaz (1) é o máximo da distribuição. Logo,

$$\frac{\nu_{max}}{T} = 3 \frac{k_B}{h}.$$