Gabarito da A3

Física III

Escola Politécnica - 2003

FGE2295 - 3^a AVALIAÇÃO

12 de junho de 2003

♢ Esta avaliação tem 100 minutos de duração.

♢ É proibida a consulta a colegas, livros e apontamentos.

♢ Escreva de forma legível.

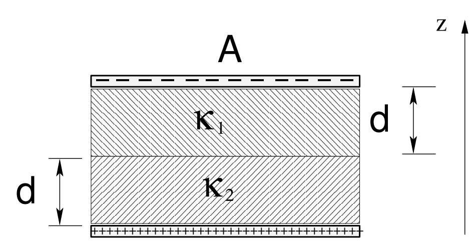
♢ É proibido o uso de calculadoras.

♢ Resolva cada questão na folha apropriada.

♢ Não serão aceitas respostas sem justificativas

Questão 1

Um capacitor é formado por duas placas paralelas metálicas de área A separadas por uma distância $2d$, com cargas $+Q$ e $-Q$. O meio entre as placas é preenchido por dois dielétricos de constantes $\kappa_1 = \epsilon_1/\epsilon_0$ e $\kappa_2 = \epsilon_2/\epsilon_0$, conforme a figura.



(0,5 ponto) (a) Calcule o campo elétrico entre as duas placas metálicas.

(1,0 ponto) (b) Calcule a capacitância C a partir da definição (não serão aceitas respostas baseadas em associações de capacitores).

(1,0 ponto) (c) Calcule a carga induzida Q_i na face superior do dielétrico de constante κ_1.

Solução da Questão 1

(a) Em cada um dos dielétricos o campo elétrico é

$$\vec{E}_a = \frac{\vec{E}_0}{\kappa_a}, \quad a = 1, 2.$$

Para um capacitor plano possuindo carga Q nas placas de área A, $\vec{E}_0 = Q/(\epsilon_0 A)\,\hat{z}$.

Portanto,

$$\vec{E} = \frac{Q}{A\,\epsilon_0\,\kappa_a}\,\hat{z} = \frac{Q}{A\,\epsilon_a}\,\hat{z}, \quad a = 1, 2,$$

respectivamente para $0 < z < d$ e $d < z < 2d$.

(b)

$$V = \int_+^- \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_0^d E_1 \mathrm{d}z + \int_d^{2d} E_2 \mathrm{d}z = \frac{Q}{A\,\epsilon_1}\,(d-0) + \frac{Q}{A\,\epsilon_2}\,(2d-d) = \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}\right)\frac{Q\,d}{A}.$$

(c)

$$(E_0 - E_1^i)\hat{z} = \frac{E_0}{\kappa_1}\hat{z}.$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{\sigma_1^i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0\,\kappa_1}.$$

$$\sigma_1^i = \left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right)\sigma$$

$$Q_1^i = A\,\sigma_1^i = \left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right)A\,\sigma = \left(1 - \frac{1}{\kappa_1}\right)Q.$$

Questão 2

Um solenóide longo com enrolamento uniforme produz um campo magnético no seu interior igual a $\vec{B}_0$ no vácuo.

(1,0 ponto) (a) O solenóide é preenchido por um material desconhecido. Observa-se que o campo magnético no seu interior diminui para $B = 0,9999 B_0$. Determine o campo de intensidade magnética H no interior do solenóide, e a susceptibilidade magnética χ_m do material. Como se classifica esse material quanto à sua propriedade magnética?

(1,0 ponto) (b) O solenóide é agora preenchido por um núcleo de ferro com permeabilidade magnética 1000 vezes maior que o valor μ_0 no vácuo. Determine a magnetização $\vec{M}$ e o campo magnético $\vec{B}$ no interior do núcleo.

(0,5 ponto) (c) Quando a corrente no solenóide é desligada, o núcleo de ferro apresenta uma magnetização remanente uniforme igual a M_1. Determine o novo valor do campo magnético B_1 no interior do núcleo.

Solução da Questão 2

(a) Por definição, $H = B_0/\mu_0$. O campo magnético no meio material é dado por

$$B = \mu H = \mu_0(1 + \chi_m)H = (1 + \chi_m)B_0.$$

Portanto,

$$\chi_m = \frac{B}{B_0} - 1 = 0,9999 - 1 = -10^{-4}.$$

O material é diamagnético.

(b) O campo magnético no interior do núcleo é

$$B = \mu H = 1000\mu_0 H = 1000B_0.$$

A magnetização é

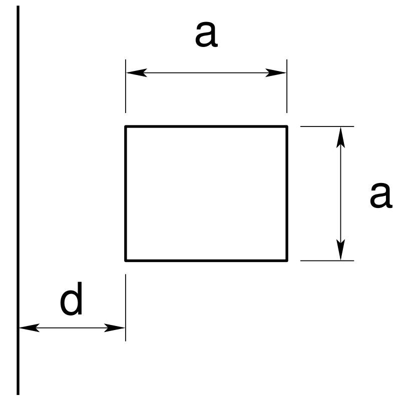
$$M = \chi_m H = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) H = 999H = 999\frac{B_0}{\mu_0}.$$

(c) Com o desligamento da corrente $B_0 = 0$. Portanto

$$B_1 = B_0 + \mu_0 M_1 = \mu_0 M_1.$$

Questão 3

Uma espira quadrada condutora de lado a e resistência R está orientada paralelamente a um fio condutor infinito a uma distância d.



(1,5 ponto) (a) Calcule a indutância mútua do sistema.

(1,0 ponto) (b) Se o fio infinito é percorrido de baixo para cima por uma corrente $I = At$, onde t é o tempo e A é uma constante positiva, calcule a corrente induzida i na espira quadrada. Determine e explique o sentido da corrente induzida.

Solução da Questão 3

(a) O fluxo magnético na espira produzido por uma corrente I no fio infinito é

$$\Phi_m = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = \int_{r=d}^{d+a} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)(adr) = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

A indutância mútua é

$$M = \frac{\Phi_m}{I} = \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

(b) A fem induzida na espira é

$$\mathcal{E} = -M\frac{dI}{dt} = -MA = -\frac{\mu_0 a A}{2\pi} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

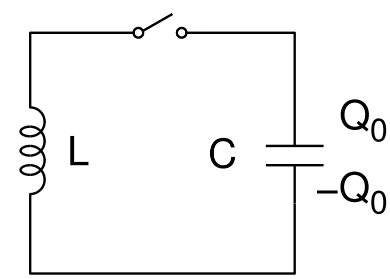
Portanto a corrente induzida é em módulo,

$$i = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{MA}{R} = \frac{\mu_0 a A}{2\pi R} \ln\left(\frac{a+d}{d}\right).$$

O fluxo magnético na espira produzido pela corrente no fio aumenta para dentro da página. Conforme a lei de Lenz, a fem induzida na espira procura compensar esse aumento produzindo um fluxo magnético para fora da página. Portanto, a corrente induzida é no sentido anti-horário.

Questão 4

Um capacitor de capacitância C e um indutor de indutância L estão ligados em série. Uma carga Q_0 é colocada na placa superior do capacitor e a chave é fechada no instante $t = 0$.



(1,5 ponto) (a) Deduza a equação diferencial para a carga $Q(t)$ na placa superior do capacitor. Sabendo que a solução geral da equação diferencial tem a forma $Q(t) = A\cos(\omega t+\phi)$, determine ω. Usando as condições iniciais para o problema determine A e ϕ.

(1,0 ponto) (a) Determine a energia $U_C(t)$ no capacitor e a energia $U_L(t)$ no indutor como função do tempo.

Solução da Questão 4

(a) A soma algébrica das quedas de tensão ao longo do circuito deve ser nula,

$$V_C + V_L = \frac{Q}{C} + L\frac{dI}{dt} = 0.$$

Adotando o sentido horário como o sentido positivo da corrente, $I = dQ/dt$. Portanto,

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0.$$

Substituindo a solução geral $Q(t) = A\cos(\omega t + \phi)$ na equação acima obtemos

$$\left(-L\omega^2 + \frac{1}{C}\right) A\cos(\omega t + \phi) = 0,$$

o que implica $\omega = 1/\sqrt{LC}$. As condições iniciais são

$$Q(0) = A\cos\phi = Q_0, \qquad I(0) = -A\omega \operatorname{sen}\phi = 0.$$

Portanto $A = Q_0$ e $\phi = 0$.

(b) As energias são

$$U_C(t) = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2\omega t, \quad U_L(t) = \frac{LI^2}{2} = \frac{L}{2}\left(\frac{dQ}{dt}\right)^2 = \frac{Q_0^2}{2C}\operatorname{sen}^2\omega t.$$