REC

Física III

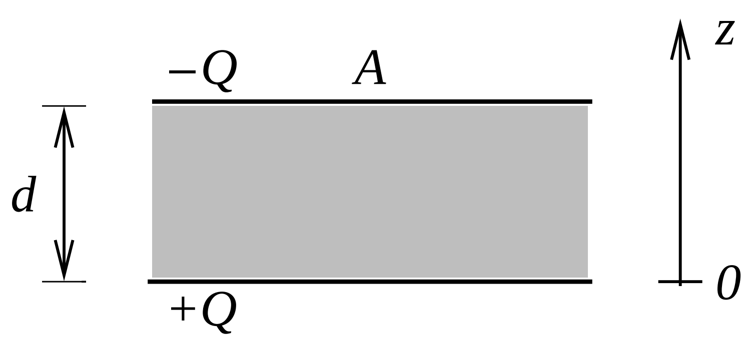
Escola Politécnica - 2005

FGE 2203 - GABARITO DA REC

28 de julho de 2005

Questão 1

Um capacitor é formado por duas placas paralelas metálicas de área A, separadas por uma distância $2d$, com cargas $+Q$ e $-Q$. O meio entre as placas é preenchido por um dielétrico de constante dielétrica $\kappa = \kappa_0(1+\frac{z}{z_0})$, onde z_0 é uma constante positiva, conforme a figura.



(1,0 ponto) (a) Calcule o campo elétrico $\vec{E}$ entre as duas placas.

(1,0 ponto) (b) Calcule a capacitância C a partir da definição.

Dado: $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\log(ax+b)$

Solução

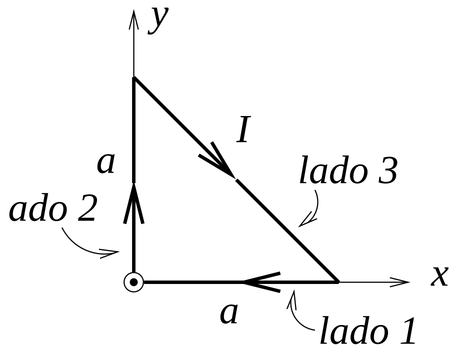
(a) $\vec{E}(z) = \dfrac{\vec{E}_0}{\kappa} = \dfrac{Q}{A\epsilon_0}\dfrac{1}{\kappa_0(1+\dfrac{z}{z_0})}\,\vec{k}$

(b) $C = \dfrac{Q}{V}$

$$V = \left|\int_0^{2d}\vec{E}\cdot d\vec{\ell}\right| = \left|\frac{Q}{A\epsilon_0\kappa_0}\int_0^{2d}\frac{1}{1+\dfrac{z}{z_0}}\right| = \frac{Q}{A\epsilon_0\kappa_0}\log\left(\frac{2d}{z_0}+1\right)$$

$$\Longrightarrow C = \frac{A\epsilon_0\kappa_0}{z_0}\frac{1}{\log\left(\dfrac{2d}{z_0}+1\right)}$$

Questão 2



Uma espira na forma de triângulo retângulo com catetos iguais a a é percorrida por uma corrente I. No espaço existe um campo magnético não uniforme dado por: $\vec{B} = B_0 \frac{y}{a} \hat{e}_x + B_0 \hat{e}_y$. Calcule:

(0,5 ponto) (a) a força sobre o lado 1 da espira;

(1,0 ponto) (b) a força sobre o lado 2 da espira;

(1,0 ponto) (c) a força sobre o lado 3 da espira;

Solução

(a) Sobre o lado 1, $\vec{B} = B_0 \hat{e}_y$ (uniforme)

$$\Longrightarrow \vec{F}_1 = I\vec{L}_1 \times \vec{B} = I(-a\hat{e}_x) \times B_0 \hat{e}_y = -IaB_0 \hat{e}_z$$

(b) Sobre o lado 2, $d\vec{\ell} = dy\hat{e}_y \Longrightarrow d\vec{\ell} \times \vec{B} = -B_0 \, \frac{y}{a} \, dy \, \hat{e}_z$

$$\Longrightarrow \vec{F}_2 = -\frac{B_0}{a} I \hat{e}_z \int_0^a y dy = -\frac{IB_0 a}{2} \hat{e}_z$$

(c) Sobre o lado 3, $d\vec{\ell} = dy\hat{e}_x - dy\hat{e}_y \Longrightarrow d\vec{\ell} \times \vec{B} = B_0 \, (1 + \frac{y}{a}) \, dy \, \hat{e}_z$

$$\Longrightarrow \vec{F}_3 = B_0 I \hat{e}_z \int_0^a (1 + \frac{y}{a}) \, dy = \frac{3}{2} IB_0 a \hat{e}_z$$

$\boxed{\text{Questão 3}}$

Um cilindro condutor muito longo de raio a, cujo eixo coincide com o eixo z, é percorrido por uma corrente total I, onde a correspondente densidade de corrente varia com a distância ao eixo do cilindro como $\vec{J}(r) = J_0 \frac{r}{a} \hat{e}_z$.

(0,5 ponto) (a) Obtenha I como função de J_0 e a.

(1,0 ponto) (b) Obtenha o campo magnético na região $r \geq a$.

(1,0 ponto) (c) Obtenha o campo magnético na região $r \leq a$.

Solução

(a) A corrente I é dada por

$$I = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^a J_0 \frac{r}{a} 2\pi r dr = \frac{2\pi}{3} J_0 a^3$$

(b) Simetria cilíndrica $\Longrightarrow \vec{B} = B(r)\hat{\phi}$

$$\text{Ampère} \Longrightarrow \oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{int} \Longrightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}}$$

(c) Corrente para $r \leq a$

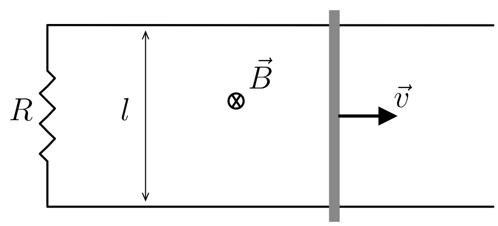
$$I_{int} = \int \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_0^r J_0 \frac{r'}{a} 2\pi r' dr' = \frac{2\pi}{3} J_0 \frac{r^3}{a}$$

$$\text{Ampère} \Longrightarrow B(r) 2\pi r = \mu_0 I \frac{2\pi}{3} \frac{r^3}{a}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 J_0}{3} \frac{r^3}{a} \hat{\phi}}$$

Questão 4

Uma barra metálica de massa m desliza sem atrito sobre dois trilhos paralelos condutores separados por uma distância l. Ver figura. Um resistor R está conectado entre os trilhos e um campo magnético uniforme $\vec{B}$, apontando para dentro da página, preenche toda a região.



(1,0 ponto) (a) Se a barra move-se para a direita com velocidade constante v, qual é a corrente I no circuito? Em que direção esta corrente flui?

(0,5 ponto) (b) Qual o valor da força magnética $\vec{F}$ sobre a barra? Qual a direção desta força?

(1,0 ponto) (c) Se a barra move-se, no instante $t = 0$, com velocidade v_0 e depois é abandonada para deslizar livremente, qual é o módulo de sua velocidade, v, num instante posterior t?

(0,5 ponto) (c) Calcule a energia total W dissipada no resistor.

Solução

(a)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv$$

$$\varepsilon = IR \Rightarrow I = \frac{Blv}{R} \quad \text{(sentido anti-horário.)}$$

(b)

$$F = IlB = \frac{B^2l^2v}{R} \quad \text{(Para a direita.)}$$

(c)

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{R}\,v \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2l^2}{Rm}\,v \Rightarrow v = v_0\,e^{-\frac{B^2l^2}{Rm}t}$$

(d) A energia é dissipada por efeito Joule no resistor. A potência dissipada é $P = I^2R$, então

$$P = \frac{dW}{dt} = I^2R = \frac{B^2l^2v^2}{R^2}\,R = \frac{B^2l^2}{R}\,v_0\,e^{-2\alpha t}\ , \quad \text{onde } \alpha \equiv \frac{B^2l^2}{Rm}$$

Assim, a potência total dissipada no resistor é:

$$W = \alpha m v_0^2 \int_0^\infty e^{-2\alpha t} = \alpha m v_0^2 \left[\frac{e^{-2\alpha t}}{-2\alpha}\right]_0^\infty = \alpha m v_0^2 \frac{1}{2\alpha} = \frac{1}{2}mv_0^2$$