P1

Física IV

Escola Politécnica - 2006

FAP 2204 - GABARITO DA P1

12 de setembro de 2006

Questão 1

Uma onda eletromagnética plana de intensidade I se propaga num meio não magnético ($\mu = \mu_0$) cuja constante dielétrica é κ.

(a) (0,5 ponto) Determine a velocidade de propagação da onda nesse meio.

(b) (1,0 ponto) Se o comprimento de onda no vácuo for λ_0, qual será o comprimento de onda e a freqüência no meio de constante dielétrica κ.

(c) (1,0 ponto) Determine a amplitude do campo elétrico a partir de I , κ e as constantes universais apropriadas (c, ϵ_0, etc...).

Solução da questão 1

(a) Num meio material

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad \text{onde} \quad \epsilon = \kappa\epsilon_0; \quad \text{como} \quad \mu = \mu_0$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\kappa\epsilon_0\mu_0}} \Longrightarrow \boxed{v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}}$$

(b) Temos:

$$\lambda\nu = v = \frac{c}{\sqrt{\kappa}}$$

Como a frequência da onda não se altera, no vácuo vale a relação

$$\lambda_0\nu = c$$

Dividindo as duas expressões obtemos

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} = \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \Longrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\kappa}}}$$

(c) Num meio material

$$|\vec{S}| = \frac{1}{\mu}EB = \frac{1}{\mu_0}\frac{E^2}{v} = \epsilon_0 c^2 \frac{E^2}{v} = \kappa\epsilon_0 v E^2 \quad \text{(veja o item (a))}$$

$$\Longrightarrow I = <|\vec{S}|> = \frac{\kappa\epsilon_0 v}{2}E_0^2 \quad \text{(0.5 ponto)}$$

$$\text{Logo,} \quad \boxed{E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0\kappa v}} = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0\sqrt{\kappa}\, c}}} \quad \text{(0.5 ponto)}$$

Questão 2

Duas placas metálicas condutoras estão localizadas nos planos $z = -a/2$ e $z = a/2$. Na região $-a/2 < z < a/2$ há uma onda eletromagnética que tem a seguinte forma:

$$\vec{E} = E(z,t)\hat{e}_x = [E_0 \cos(kz - \omega t) + E_0 \cos(-kz - \omega t)]\hat{e}_x$$

(a) (0,5 ponto) Escreva o campo $E(z,t)$ como o produto de dois cossenos.

(c) (1,0 ponto) Calcule o campo magnético $\vec{B}$.

(d) (0,5 ponto) Calcule o vetor de Poynting $\vec{S}$.

(e) (0,5 ponto) Calcule o valor médio $< \vec{S} >$.

$\boxed{\textbf{Solução da questão 2}}$

(a) Expandindo os cossenos obtemos

$$E = E_0[\cos(kz)\cos(\omega t) + \text{sen}(kz)\text{sen}(\omega t) + E_0[\cos(kz)\cos(\omega t) - \text{sen}(kz)\text{sen}(\omega t)]$$

$$\boxed{\vec{E} = 2E_0\cos(kz)\cos(\omega t)\hat{e}_x}$$

(b) Note que $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, onde $\vec{E}_1 = E_0\cos(kz - \omega t)\hat{e}_x$ e $\vec{E}_2 = E_0\cos(-kz - \omega t)\hat{e}_x$, são ondas planas com $\vec{k}_1 = k\hat{e}_z$ e $\vec{k}_2 = -k\hat{e}_z$. Assim,

$$\vec{B}_1 = \frac{1}{c}\hat{e}_z \times \vec{E}_1 = \frac{E_0}{c}\cos(kz-\omega t)\hat{e}_y\,; \qquad \vec{B}_2 = \frac{1}{c}(-\hat{e}_z)\times\vec{E}_2 = -\frac{E_0}{c}\cos(-kz-\omega t)\hat{e}_y$$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{E_0}{c}(\cos(kz - \omega t) - \cos(-kz - \omega t))\hat{e}_y$$

$$\boxed{\vec{B} = 2\frac{E_0}{c}\text{sen}(kz)\text{sen}(\omega t)\hat{e}_y}$$

(c) Vetor de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}/\mu_0$

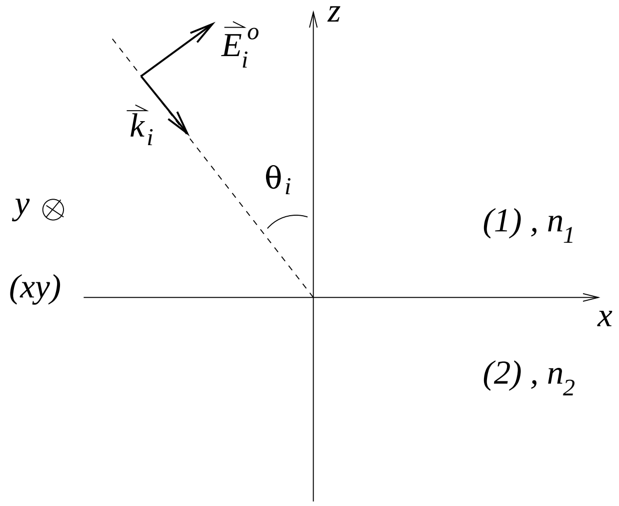
$$\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0}\hat{e}_z = \frac{4E_0^2}{\mu_0\, c}\cos(kz)\text{sen}(kz)\cos(\omega t)\text{sen}(\omega t)\hat{e}_z = \frac{E_0^2}{\mu_0\, c}\text{sen}(2kz)\text{sen}(2\omega t)\hat{e}_z$$

(d) Média temporal do vetor de Poynting

$$< S >= \frac{E_0^2}{\mu_0\, c}\text{sen}(2kz) < \text{sen}(\omega t) >= 0 \Longrightarrow < \vec{E} >= \vec{0}.$$

Questão 3

Uma O.E.M. plana incide obliquamente sobre a interface entre dois meios. Essa interface está situada no plano $z = 0$. A onda incide proveniente do meio (1) de índice de refração n_1 em direção ao meio (2) de índice de refração $n_2 > n_1$. O campo elétrico da onda incidente está contido no plano de incidência (plano xz), conforme a figura.



O ângulo de incidência é θ_i. O vetor de onda incidente é dado por $\vec{k}_i$. A onda é parcialmente refletida para o meio (1) e parcialmente transmitida para o meio (2). Sejam os ângulos de reflexão e transmissão designados por θ_r e θ_t respectivamente e $\vec{k}_r$ e $\vec{k}_t$ os vetores de onda correspondentes.

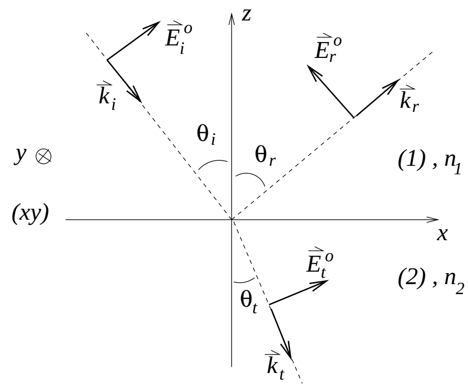
(a) (1,0 ponto) Faça um esquema indicando a direção de propagação dos vetores de onda $\vec{k}_r$, $\vec{k}_t$ e os campos $\vec{E}_r$ (para $n_2 > n_1$) e $\vec{E}_t$ das ondas refletida e transmitida.

(b) (0,5 ponto) Designando por $\vec{E}_i^0$, $\vec{E}_r^0$ e $\vec{E}_t^0$ as amplitudes das três ondas, escreva as expressões analíticas de cada uma delas, isto é, $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$, $\vec{E}_r(\vec{r}, t)$ e $\vec{E}_t(\vec{r}, t)$

(c) (1,0 ponto) Usando a condições de contorno para a componente tangencial do campo elétrico na interface ($z = 0$ e x qualquer, isto é, $\vec{r}$ é um vetor contido no plano $z = 0$) mostre que: $\theta_i = \theta_r$ e que $n_1 \text{sen}\theta_i = n_2 \text{sen}\theta_t$ (1.0).

Solução da questão 3

(a) Como $n_2 > n_1$ as componentes x da onda refletida e da onda incidente têm sinais opostos.



(b) Os campos elétricos são dados por

$$\vec{E}_i(\vec{r},t) = \vec{E}_i^0 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)\,;\; \vec{E}_r(\vec{r},t) = \vec{E}_r^0 \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)\,;\; \vec{E}_t(\vec{r},t) = \vec{E}_t^0 \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)$$

(c) Na interface, $\vec{r} \equiv (x, y, 0)$. Por outro lado, $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$. Portanto, $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x\, x$

$$\Longrightarrow \vec{k}_i \cdot \vec{r} = k_i\,\mathrm{sen}\theta_i\, x; \quad \vec{k}_r \cdot \vec{r} = k_r\,\mathrm{sen}\theta_r\, x; \quad \vec{k}_t \cdot \vec{r} = k_t\,\mathrm{sen}\theta_t\, x$$

As componentes tangencias à interface dos campos elétricos são as componentes x:

$$E_i^0 \cos\theta_i \cos(k_i \mathrm{sen}\theta_i x - \omega t);\; -E_r^0 \cos\theta_r \cos(k_r \mathrm{sen}\theta_r x - \omega t);\; E_t^0 \cos\theta_t \cos(k_t \mathrm{sen}\theta_t x - \omega t)$$

A componente tangencial de $\vec{E}$ é contínua através da interface. Portanto,

$$E_i^0 \cos\theta_i \cos(k_i \mathrm{sen}\theta_i x - \omega t) - E_r^0 \cos\theta_r \cos(k_r \mathrm{sen}\theta_r x - \omega t) = E_t^0 \cos\theta_t \cos(k_t \mathrm{sen}\theta_t x - \omega t)$$

Esta equação deve ser satisfeita para todo x e todo t. Isto só é possível se

$$k_i \mathrm{sen}\theta_i = k_r \mathrm{sen}\theta_r = k_t \mathrm{sen}\theta_t.$$

Da primeira igualdade segue que $\theta_i = \theta_r$ pois $k_i = k_r$ (mesmo meio), e da primeira e terceira segue que

$$k_i \mathrm{sen}\theta_i = k_t \mathrm{sen}\theta_t$$

$$\frac{\omega}{k} = v = \frac{c}{n} \Rightarrow k = \frac{n\omega}{c} \quad \text{e} \quad \boxed{n_1 \mathrm{sen}\theta_i = n_2 \mathrm{sen}\theta_t}$$

Questão 4

Uma película transparente de espessura $L = 4 \times 10^{-5}$ cm e com índice de refração $n = 1,5$ é iluminada por luz branca. A pelicula está imersa no vácuo. Considere incidência normal.

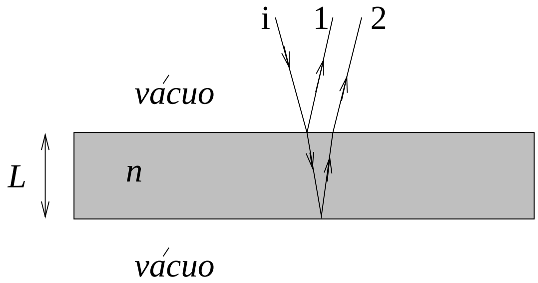
(a) (1,0 ponto) A luz refletida terá alguns comprimentos de onda intensificados. Escreva a equação que determina estes comprimentos de onda.

(b) (1,0 ponto) A luz visível tem comprimento de onda entre $400nm$ e $700nm$. Qual comprimento de onda da luz visível será intensificado?

(c) (0,5 ponto) Se L for muito pequeno nenhum comprimento de onda visível será intensificado. Determine o valor limite para L.

Solução da questão 4

(a) O raio incidente i se divide no raio refletido 1 e no raio refratado 2, conforme a figura.



Como o índice de refração da película é maior que o do vácuo, o raio 1 vai se defasar de π radianos, ou de meio comprimento de onda. Para haver interferência construtiva devemos ter

$$\frac{2L}{\lambda_{película}} - \frac{1}{2} = m \Leftrightarrow 2nL = (m + \frac{1}{2})\lambda,$$

onde $\lambda_{película} = \lambda/n$, λ é o comprimento de onda no vácuo e m é um inteiro.

(b) Do item (a) vem

$$\lambda = \frac{2nL}{m + 1/2} = \frac{4nL}{2m+1} = \frac{(4 \times 1,5)(4 \times 10^{-7})}{2m+1} = \frac{24 \times 10^{-7}}{2m+1}$$

$$\lambda_m \equiv \frac{24}{2m+1} \times 10^{-7} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \lambda_0 &= 24 \times 10^{-7} \\ \lambda_1 &= 8,0 \times 10^{-7} \\ \lambda_2 &= 4,8 \times 10^{-7} \Leftarrow \text{visível} \\ \lambda_3 &= 3,4 \times 10^{-7} \\ \lambda_4 &= 2,7 \times 10^{-7} \end{aligned}$$

(c) Note que quanto maior for m na expressão do item (b), <u>menor</u> será λ_m. Se L for suficientemente pequeno nem mesmo com $m = 0$ λ_m será maior que $400nm$. Assim, na condição limite devemos ter

$$\lambda_0 = \frac{2nL_{mín}}{1/2} \quad \text{com} \quad \lambda_0 = 400nm \Longrightarrow L_{mín} = \frac{\lambda_0}{4\,n} = \frac{400}{4 \times 1,5} = 66nm$$

$$\boxed{L_{mín} < 66nm}$$