**P2**

# Física IV

Escola Politécnica - 2006

FAP 2204 - GABARITO DA P2

**24 de outubro de 2006**

## Questão 1

A. O comprimento de onda de corte para ejetar elétron da superfície do metal lantânio é $\lambda_0 = 3760$ Å.

(a) (0,5 ponto) Qual é a função de trabalho $W$ para esse metal em eV ?

(b) (1,0 ponto) Qual é a energia cinética máxima $E_{cin}$ dos fotoelétrons emitidos por esse material quando ele é iluminado por luz ultravioleta de comprimento de onda 2000 Å ?

<u>Dados:</u> $1\text{Å} = 10^{-10}\,m$ e $h \approx 4,1 \times 10^{-15}\;eV \cdot s$)

B. (1,0 ponto) Uma partícula que se move ao longo do eixo $x$ com velocidade $v$ tem uma incerteza na sua posição igual ao comprimento de onda de de Broglie. Qual é a incerteza em sua velocidade?

## **Solução da questão 1**

A(a) Para a freqüência de corte

$$h\nu_0 = W$$

mas $\nu_0 = c/\lambda_0$, então

$$W = \frac{hc}{\lambda_0} \approx 3,3\,eV$$

A(b) A energia cinética $E_{cin}$ dos fotoelétrons é

$$E_{cin} = h\nu - W\,, \quad \text{logo}$$

$$E_{cin} = \frac{hc}{\lambda} - W = 6,2 - 3,3 = 2,9eV$$

$$E_{cin} = 2,9eV$$

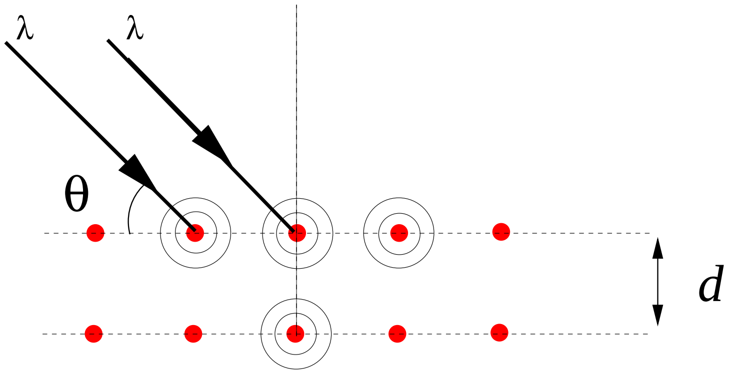
(B) O princípio de incerteza de Heisenberg fornece

$$\left.\begin{array}{l} \Delta p\, \Delta x \sim \hbar \\ \Delta x \sim \lambda_c = \dfrac{h}{p} \end{array}\right\} \Longrightarrow \Delta p\, \frac{h}{p} \sim \frac{h}{2\pi}$$

$$\Delta p \sim \frac{p}{2\pi} \Longrightarrow m\Delta v \sim \frac{mv}{2\pi} \Longrightarrow \boxed{\Delta v \sim \frac{v}{2\pi}}$$

## Questão 2

Um feixe de raios-X de comprimento de onda $\lambda$ incide sobre a superfície de um cristal fazendo um ângulo $\theta$ com planos paralelos do cristal, conforme a figura. A distância entre os planos é $d$.



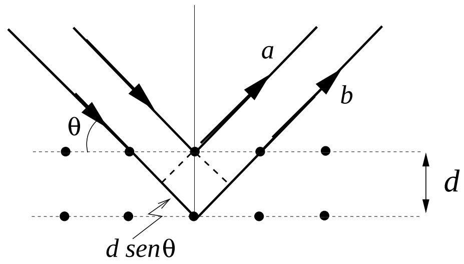

(a) (1.0 ponto) Mostre que a condição de interferência construtiva (máximos da onda refletida) é dada por $2d\text{sen}\theta = m\lambda$ onde $m = 1, 2, \ldots.$

(b) (0.5 ponto) Mostre que a condição de Bragg (mostrada no item (a)) não pode ser satisfeita quando o comprimento de onda $\lambda$ for maior do que $2d$.

(c) (1.0 ponto) No caso em que $\lambda = 0,15$ nm verifica-se que o máximo de primeira ordem ocorre sob um ângulo de $14,4°$. A partir desse resultado determine o parâmetro $d$ da rede. <u>Dado:</u> $\text{sen}(14,4°) = 0{,}25$

**Solução da questão 2**

(a) A interferência construtiva ocorre quando a diferença de percurso $\Delta s$ entre os raios $a$ e $b$ é um múltiplo inteiro de $\lambda$.




$$\Delta s = m\lambda \quad (m = 1, 2, ...) \quad \text{com} \quad \Delta s = 2\, d\, \text{sen}\theta$$

$$\therefore \quad \boxed{2\, d\, \text{sen}\theta = m\lambda}$$

(b) Considere agora $\lambda' = k2d \quad (k > 1)$. Teríamos

$$2\, d\, \text{sen}\theta = m\lambda' = mk2d \Longrightarrow \boxed{\text{sen}\theta = mk > 1},$$

tornando impossível a condição de interferência.

(c) O máximo de primeira ordem corresponde a $m = 1$ na fórmula de Bragg.

$$d = \frac{m\lambda}{2\, \text{sen}\theta} = \frac{0,15}{2\, \text{sen}(14,4°)} = 0,30\, nm$$

$$\therefore \quad \boxed{d = 0,30\, nm}$$

## Questão 3

Um fóton com comprimento de onda $\lambda_0$ experimenta um espalhamento Compton ($\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta)$). O fóton espalhado é observado numa direção perpendicular àquela da incidência.

(a) (0,5 ponto) Escreva as equações de conservação que permitem obter a equação do espalhamento Compton.

(b) (0,5 ponto) Determine o comprimento de onda $\lambda$ da radiação espalhada.

(c) (1,0 ponto) Calcule a energia cinética $E_{cin}^{ele}$ de recuo do elétron.

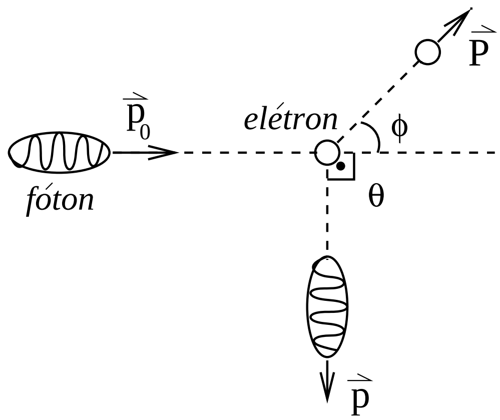
(d) (0,5 ponto) Calcule, usando a cinemática relativística, o módulo da velocidade de recuo, $v_e$, do elétron.

**Solução da questão 3**

(a) Conservação da energia

$$\frac{hc}{\lambda_0} + m_0c^2 = \frac{hc}{\lambda} + m_0\gamma c^2$$

$$\Longrightarrow \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = m_0\gamma c^2 - m_0c^2 = E_{cin}^{ele}$$




Conservação de momento

$$\begin{cases} \dfrac{h}{\lambda_0} = m_0\gamma v\cos\phi \\ 0 = \dfrac{h}{\lambda} - m_0\gamma v \text{sen}\phi \end{cases}$$

(b) Lembrando que $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0$, obtemos

$$\lambda - \lambda_0 = \lambda_c(1 - \cos\theta) \overset{\theta=\pi/2}{\Longrightarrow} \lambda = \lambda_0 + \lambda_c$$

(c) Da conservação de energia

$$E_{cin}^{ele} = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \lambda_c} \Longrightarrow E_{cin}^{ele} = \frac{hc\lambda_c}{\lambda_0(\lambda_0 + \lambda_c)}$$

(d) A energia cinética é dada por

$$E_{cin}^{ele} = mc^2 - m_0c^2 \Leftrightarrow E_{cin}^{ele} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_e^2}{c^2}}} - m_0c^2$$

Resolvendo para $v_e$ resulta

$$v_e = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{E_{cin}^{ele}}{m_0c^2} + 1\right)^2}} = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{hc\lambda_c}{m_0c^2\,\lambda_0(\lambda_0+\lambda_c)} + 1\right)^2}}$$

## Questão 4

Num átomo hidrogenóide o potencial (coulombiano) entre o elétron e o núcleo com $Z$ prótons é dado por $U = -\dfrac{kZe^2}{r}$, onde $e$ é a carga do elétron, $r$ é a distância entre o núcleo e o elétron e $k = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}$.

(a) (0,5 ponto) Escreva a força centrípeta do elétron em termos da força atrativa coulombiana entre os prótons e o elétron, e escreva a energia cinética do elétron (não relativístico), $K$, em função de $r$.

(b) (0,5 ponto) Mostre que a energia $E = K + U$ do átomo pode ser escrita como $E = -\dfrac{kZe^2}{2r}$.

(c) (1,0 ponto) Levando em conta, de acordo com Bohr, que o momento angular $\vec{L}$ do elétron obedece à condição $|\vec{L}| = n\hbar$, onde $\hbar$ é a constante de Planck e $n = 1, 2, 3, ...$, mostre que as distâncias $r_n$ são dadas por $r_n = n^2\, a_0$, onde $a_0 = \dfrac{\hbar^2}{mkZe^2}$.

(d) (0,5 ponto) A partir dos resultados acima mostre que numa transição entre os estados com números quânticos $n_i$ e $n_f$ $(n_i > n_f)$ a freqüência $f$ do fóton emitido é dada por

$$f = \frac{kZe^2}{2a_0 h}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right).$$

**Solução da questão 4**

(a) A força centrípeta que mantem o elétron girando em torno do núcleo é dada pela força coulombiana.

$$F_{cent} = \frac{mv^2}{r} = \frac{kZe^2}{r^2} \Longrightarrow \boxed{mv^2 = \frac{kZe^2}{r}} \quad (1)$$

Usando a eq. (1) a energia cinética $K = mv^2/2$ pode ser escrita como

$$\boxed{K = \frac{kZe^2}{2r}} \quad (2)$$

(b) A energia $E$ do átomo é dada por

$$E = K + U \stackrel{(2)}{=} \frac{kZe^2}{2r} - \frac{kZe^2}{r} \quad \therefore \quad \boxed{E = -\frac{kZe^2}{2r}} \quad (3)$$

(c) A quantização do momento angular fornece

$$mvr = n\hbar \Longrightarrow m^2v^2r^2 = n^2\hbar^2 \Longrightarrow \boxed{mv^2 = \frac{n^2\hbar^2}{mr^2}} \quad (4)$$

Substituindo (4) em (1) obtemos

$$\frac{n^2\hbar^2}{mr^2} = \frac{kZe^2}{r} \Longrightarrow \boxed{r_n = \frac{n^2\hbar^2}{mkZe^2} \equiv n^2\, a_0} \quad (5)$$

(d) Os níveis de energia do átomo hidrogenóide são obtidos substituindo-se (5) em (3).

$$\boxed{E_n = -\frac{kZe^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n^2}\right)} \quad (6)$$

A freqüência do fóton emitido na transição $i \rightarrow f$ é dada por

$$f = \frac{E_i - E_f}{h} \stackrel{(6)}{=} \frac{kZe^2}{2a_0}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)$$