P1

Física IV

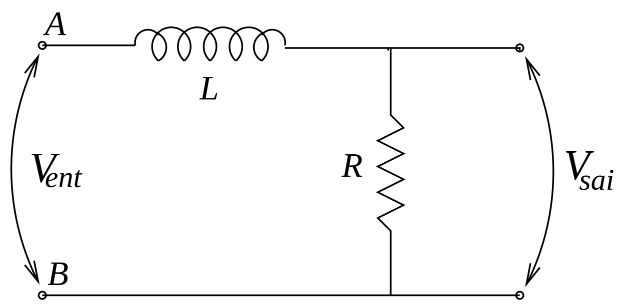
Escola Politécnica - 2007

FAP 2204 - GABARITO DA P1

11 de setembro de 2007

Questão 1

No circuito mostrado na figura abaixo, uma indutância L está em série com um resistor R. Aplica-se ao circuito uma ddp $v_{ent}(t) = V_{ent}\,\text{sen}(\omega t)$ entre os pontos A e B.



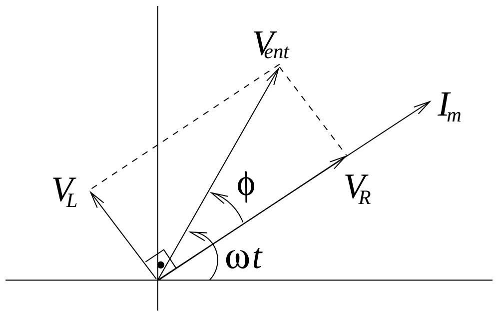
(a) (0,5 ponto) Desenhe no diagrama de fasores para o sistema as voltagens e as correntes no indutor e no resistor.

(b) (1,0 ponto) Calcule I_m e ϕ na expressão da corrente no circuito $I(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \phi)$.

(c) (1,0 ponto) Calcule a relação entre a voltagem máxima de saída V_{sai} e a voltagem máxima de entrada V_{ent}. Dê sua resposta em função de L, R e ω. O sistema filtra as frequências altas (filtro passa baixos) ou as frequências baixas (filtro passa altos)?

Solução da questão 1

(a) Como o resistor e o indutor estão em série, a corrente é a mesma nos dois elementos. A voltagem no resistor está em fase com a corrente. No indutor a voltagem está adiantada de $\pi/2$ em relação à corrente.



(b) A corrente $I(t) = I_m \text{sen}(\omega t - \phi)$. Da figura no item (a) obtemos

$$\left.\begin{array}{l} V_{ent} = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \\ V_R = RI_m, \quad V_L = X_L I_m, \quad X_L = \omega L \end{array}\right\} \Longrightarrow V_{ent} = \sqrt{R^2 + X_L^2}\; I_m$$

$$\Longrightarrow \boxed{I_m = \frac{V_{ent}}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}} \quad \text{e} \quad \boxed{\phi = \tan^{-1}\left(\frac{V_L}{V_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{X_L}{R}\right)}$$

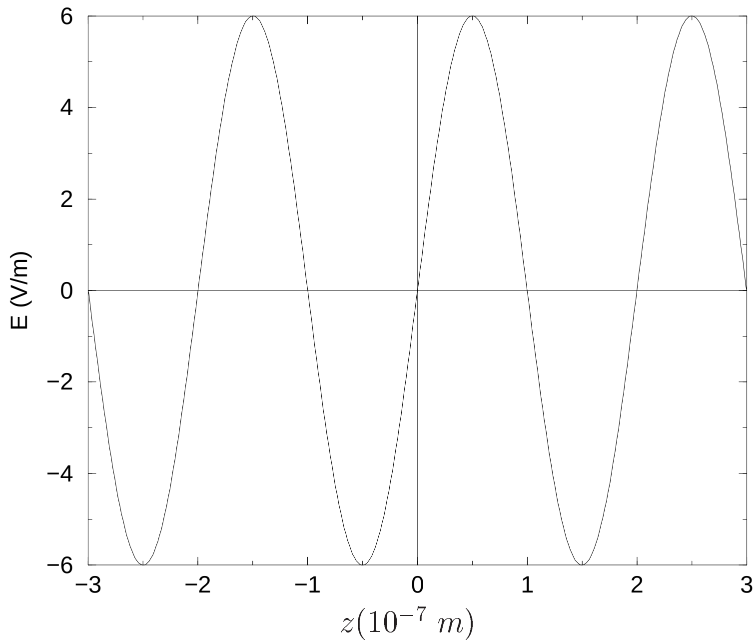
(c) A razão entre as voltagens máximas é

$$\frac{V_{sai}}{V_{ent}} = \frac{RI_m}{ZI_m} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

$$\frac{V_{sai}}{V_{ent}} \xrightarrow{\omega \to \infty} 0 \quad \text{e} \quad \frac{V_{sai}}{V_{ent}} \xrightarrow{\omega \to 0} 1 \quad \underline{\text{filtro passa baixos}}$$

Questão 2

Uma onda eletromagnética, plana e monocromática se propaga no vácuo na direção positiva do eixo z. Seu campo elétrico oscila ao longo do eixo x e o gráfico $E \times z$ em $\underline{t = 0}$ é mostrado na figura abaixo.



(a) (0,5 ponto) Calcule a frequência angular ω e o número de onda k (coloque $c = 3 \times 10^8\, m/s$).

(b) (1,0 ponto) Escreva a expressão do vetor campo elétrico $\vec{E}$ para todo o espaço e para qualquer instante de tempo t.

(c) (1,0 ponto) Usando a lei de Faraday, $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, determine o vetor $\vec{B}$.

<u>Dado:</u> $\vec{\nabla} \times \vec{E} = (\dfrac{\partial E_z}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y}{\partial z})\vec{\imath} + (\dfrac{\partial E_x}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z}{\partial x})\vec{\jmath} + (\dfrac{\partial E_y}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x}{\partial y})\vec{k}$

Solução da questão 2

(a) Do gráfico obtemos

$$\lambda = 2 \times 10^{-7}\, m \implies \boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \pi \times 10^{7}\, m^{-1}}$$

$$\omega = kc = (\pi \times 10^{7})(3 \times 10^{8}) \implies \boxed{\omega = 3\pi \times 10^{15}\, s^{-1}}$$

(b) O campo elétrico $\vec{E} = E_0 \,\mathrm{sen}(kz - \omega t + \delta)\, \hat{e}_x$. Para $z = 0$ e $t = 0$, $E(z = 0, t = 0) = E_0 \,\mathrm{sen}\, \delta = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$

$$\boxed{\vec{E} = 6\,\mathrm{sen}(\pi \times 10^{7}\, z - 3\pi \times 10^{15}\, t)\, \hat{e}_x}$$

(c) Vimos no item (b) que $\vec{E} = E_x\, \hat{e}_x = E_0 \,\mathrm{sen}(kz - \omega t)\, \hat{e}_x$. Portanto,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \implies \frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \implies \frac{\partial B_y}{\partial t} = -E_0\, k\, \cos(kz - \omega t)$$

Como estamos interessados em soluções do tipo onda assumimos que B_y também depende de z e t na combinação $kz - \omega t \equiv s$. Assim,

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{dB_y}{ds}\frac{\partial s}{\partial t} = -\omega \frac{dB_y}{ds} = -E_0\, k\, \cos(s) \implies B_y(s) = E_0\, \frac{k}{\omega}\, \mathrm{sen}(s) + cte$$

A constante aditiva não está relacionada à propagação da onda e pode ser colocada igual a zero. Além disto, $k/\omega = 1/c$

$$\boxed{\vec{B} = 2 \times 10^{-8}\, \mathrm{sen}(\pi \times 10^{7}\, z - 3\pi \times 10^{15}\, t)\, \hat{e}_y}$$

Questão 3

Considere um circuito RLC em série ligado a um gerador de fem $v(t) = V_m \mathrm{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t\right)$. Determine:

(a) (1,0 ponto) a impedância do circuito;

(b) (0,5 ponto) a corrente máxima I_m;

(c) (0,5 ponto) a defasagem ϕ entre a corrente e a voltagem;

(d) (0,5 ponto) a potência média fornecida pela fonte.

Solução da questão 3

(a) As reatâncias são $X_L = \omega L$ e $X_C = 1/\omega C$. Da expressão para $v(t)$ obtemos

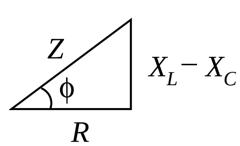
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \text{logo} \quad X_L = X_C = \sqrt{\frac{L}{C}} \Longrightarrow Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

$$\boxed{Z = R}$$

(b) A corrente máxima é

$$\boxed{I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{V_m}{R}}$$

(c) A fase é zero.



$$X_L = X_C \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\phi = 0}$$

(d) Potência média

$$\boxed{P_{média} = \frac{1}{2} I_m V_m \cos\phi = \frac{1}{2}\frac{V_m^2}{R}}$$

Questão 4

Um laser de intensidade I produz um feixe de radiação monocromático, cilíndrico e com seção reta de raio R. O feixe incide perpendicularmente sobre uma placa que absorve 1/3 da radiação incidente e reflete os 2/3 restantes. Calcule

(a) (0,5 ponto) a potência média emitida pelo laser;

(b) (0,5 ponto) as amplitudes dos campos elétricos e magnéticos dos feixes incidentes;

(c) (1,0 ponto) a força exercida pela radiação sobre a placa;

(c) (0,5 ponto) a densidade volumétrica média de energia do feixe.

Solução da questão 4

(a) Lembrando que $I =< S >$ podemos escrever

$$\boxed{< P_{ot} >=< S > \pi R^2 = I\pi R^2}$$

(b) $I =< S >= \dfrac{1}{\mu_0} < EB >= \dfrac{1}{2\mu_0} E_m B_m = \dfrac{1}{2\mu_0 c} E_m^2 = \dfrac{c}{2\mu_0} B_m^2$

$$\Longrightarrow \boxed{E_m = \sqrt{2\mu_0 c I}}\ , \qquad \boxed{B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 I}{c}}}$$

(c) A pressão de radiação é dada por $P_{rad} = 2I/c$ quando a reflexão é total e por $P_{rad} = I/c$ quando a absorção é total. Assim, a força sobre a placa é

$$F = \left(\frac{2}{3} \times \frac{2I}{c} + \frac{1}{3} \times \frac{I}{c}\right) \pi R^2 \Longrightarrow \boxed{F = \frac{5I}{3c} \pi R^2}$$

(d) A densidade volumétrica média de energia $< u >$ é dada por

$$\boxed{< u >= \frac{< S >}{c} = \frac{I}{c}}$$

Formulário

$$Z=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2},\quad X_L=\omega L,\quad X_C=\frac{1}{\omega C},\quad \tan\phi=\frac{X_L-X_C}{R},\quad V_m=ZI_m,$$

$$P_{med}=\frac{1}{2}V_mI_m\cos\phi,\quad \frac{V_1}{N_1}=\frac{V_2}{N_2}\quad \text{(transformadores).}$$

No <u>vácuo</u>: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{A}=\frac{q_{int}}{\epsilon_0},\quad \oint \vec{B}\cdot d\vec{A}=0,\quad \oint \vec{E}\cdot d\vec{\ell}=-\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{A},$

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{\ell}=\mu_0 I+\mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\int \vec{E}\cdot d\vec{A},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0},\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0,\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t},$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t},\quad \nabla^2\vec{E}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2},\quad \nabla^2\vec{B}=\mu_0\epsilon_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2},\quad c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}},\quad E=cB.$$

Onda senoidal se propagando na direção x: $E=E_m\text{sen}(kx-\omega t+\delta)$,

$$B=B_m\text{sen}(kx-\omega t+\delta),\quad k=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=\frac{2\pi}{T}.\quad k\,c=\omega.$$

Vetor de Poynting $\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B},\quad S=uc,\quad u=u_e+u_m=\frac{\epsilon_0\,E^2}{2}+\frac{B^2}{2\mu_0}.$

Para ondas senoidais: $I=<S>=\frac{E_m\,B_m}{2\mu_0}.$

Para incidência normal $P_{rad}=\frac{2I}{c}$ (reflexão total) e $P_{rad}=\frac{I}{c}$ (absorsão total).

Em <u>meios dielétricos</u> basta fazer $\epsilon_0\to\epsilon,\quad \mu_0\to\mu$ e $c\to v=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ nas fórmulas acima, onde $\epsilon=\kappa\epsilon_0=(1+\chi)\epsilon_0,$ e $\mu=\kappa_m\mu_0=(1+\chi_m)\mu_0.$